Επιχειρησιακή έρευνα. 20/12

Παράδειγμα προηγούμενου μαθήματος

$L_1 \xrightarrow{1} 10.000$

L_2: $0.5 \to 30.000$, $0.5 \to 0$

$L_3 \xrightarrow{1} 0$

L_4: $0.02 \to -10.000$, $0.98 \to 500$

$\xrightarrow{1} r_1$: $p_1 \to 30.000$, $1-p_1 \to -10.000$

$r_1 = 10.000$

$\xrightarrow{1} 10.000$: $0{,}9 \to 30.000$, $0{,}1 \to -10.000$

$r_2 = 500$

$\xrightarrow{1} 500$: $0{,}62 \to 30.000$, $0{,}38 \to -10.000$

$r_3 = 0$

$\xrightarrow{1} 0$: $0{,}6 \to 30.000$, $0{,}4 \to 10.000$

Εδώ οι πιθανότητες μας δίνονται από εκφώνηση

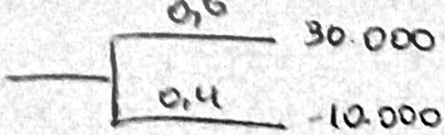
Άρα

L_1': $0{,}9 \to 30.000$, $0{,}1 \to -10.000$

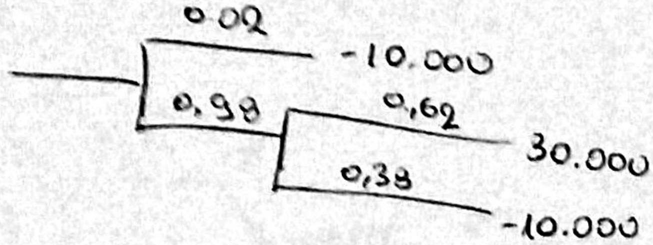
L_2'': $0{,}5 \to 30.000$, $0{,}5 \to$ ($0{,}6 \to 30.000$, $0{,}4 \to -10.000$)

L_2': $0{,}8 \to 30.000$, $0{,}2 \to -10.000$

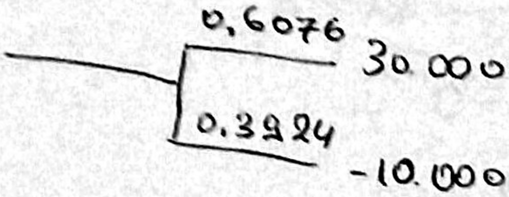
L_3'



L_4''



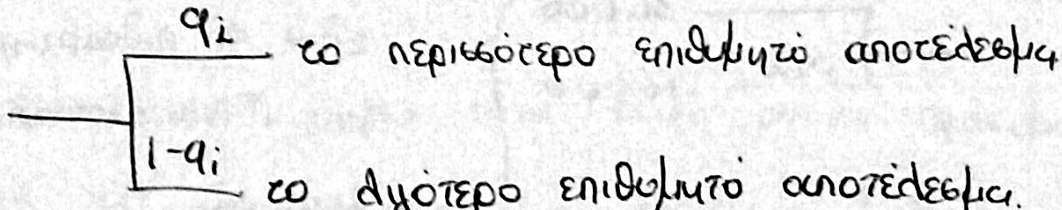
L_4'



Τις ταξινομώ και έχω $L_1 \, p \, L_2 \, p \, L_4 \; L_5$

<u>utility function $u(r_i)$</u> (συνάρτηση χρησιμότητας)

$\xrightarrow{1} n$



Άρα $u(30.000)=1$ $\quad$ $u(10.000)=0,9$

$u(-10.000)=0$ $\quad$ $u(500)=0,62$

$L=(p_1, r_1; p_2, r_2; \ldots ; p_n, r_n)$

$E(u \text{ για } L) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(r_i)$

$E(u$ για $L_1) = 1\times 0.9 = 0.9$

$E(u$ για $L_2) = 1\times 0.5 + 0.5\times 0.6 = 8$

$E(u$ για $L_3) = 1\times 0.6 = 0.6$

$E(u$ για $L_4) = 0.02\times 0 + 0.98\times 0.62 = 0.6076$

$L_1 p L_2$ αν $E(u$ για $L_1) > E(u$ για $L_2)$

$L_1 p L_2$ αν $E(u$ για $L_2) > E(u$ για $L_1)$

$L_1 i L_2$ αν $E(u$ για $L_2) = E(u$ για $L_1)$

Von Neumann Morgerstern Αξιώματα

1) Κριτήριο διάταξης

Για 2 οποιοδήποτε αποδαβές ένα από τα ακόλουθα αληθεύει

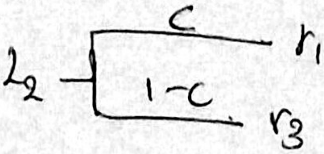
ο decision maker
a. προτιμά το r_1 από το r_2
β. προτιμά το r_2 από το r_3
γ. είναι αδιάφορη

Επίσης αν ισχύουν τα a, β ταυτόχρονα τότε προτιμά το r_1 από το r_3

1) Αξίωμα συνέχειας

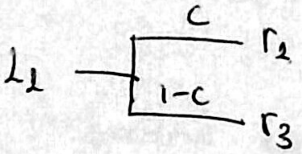
Αν d.m προτιμά το r_1 από το r_2 ή το r_2 από το r_3 τότε για κάποιο c με $0 < c \leq 1$ $L_1 i L_2$

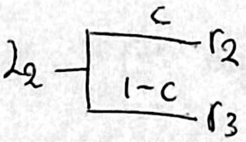
$L_1 \xrightarrow{1} r_2$



3) Αξίωμα ανεξαρτησίας

Ο d.m αδιάφορος μεταξύ r_1 ή r_2 ή έστω r_3 μια άλλη απολαβή τότε για οποιοδήποτε c με $0<c<1$ L_1 i L_2





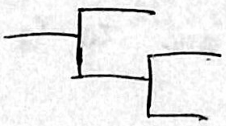
4) Αξίωμα άνισων πιθανοτήτων

Κάποιος προτιμά το r_1 από το r_2

Αν οι 2 λοταρίες έχουν μόνο r_1 ή r_2 ως πιθανά αποτελέσματα τότε κάποιος θα προτιμούσε την λοταρία με την μεγαλύτερη να φέρει το r_1

5) Αξίωμα σύνθετης λοταρίας

π.χ σύνθετης



Δοθείσας μιας utility συνάρτησης $u(x)$ ορίζουμε για οποιοδήποτε $a>0$ και $b>0$ την συνάρτηση $v(x)=a\,u(x)+b$.

Έστω 2 οποιεσδήποτε λοταρίες L_1, L_2

Για ένα d.m που χρησιμοποιεί την $u(x)$ ως utility συνάρτηση ισχύει $L_1 p L_2$* όταν ο d.m που χρησιμοποιεί τη $v(x)$ ως utility συνάρτηση ισχύει $L_1 p L_2$*

ισχύει το ίδιο και για τα:
* $(L_2 p L_1)(L_1 i L_2)$

Έστω $u(-10.000) = 5$

$u(30.000) = 10$

και $V(x) = a u(x) + b$ τότε μπορώ να βρω τα a, b για να καταλήξω στην ίδια απόφαση.

Εκτίμηση της συνάρτησης χρησιμότητας

$u(-10.000) = 0$ $\quad$ $u(30.000) = 1$

$u(x_{1/2}) = \frac{1}{2}$

$L \rightarrow x_{1/2}$ $\quad$ $\frac{1}{2}$: 30.000 $\quad$ $\frac{1}{2}$: -10.000

Έστω ότι $x_{1/2} = -3400$ | μας δίνεται τυχαία. |

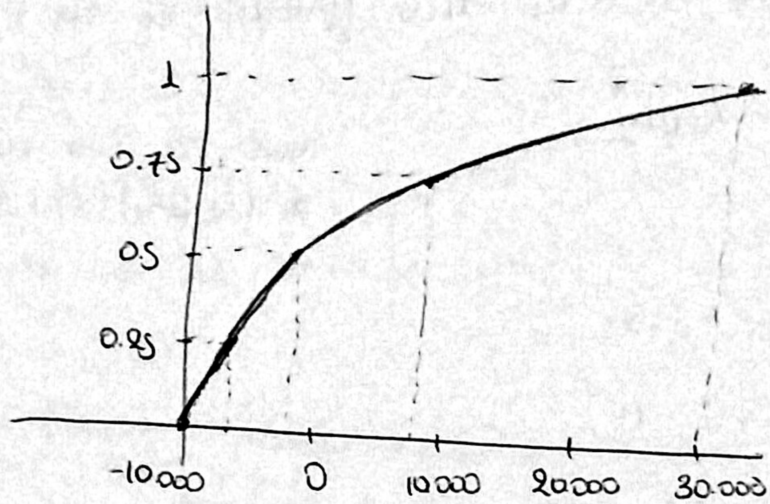
πρέπει σύμφωνα με τα αξιώματα να ανήκει στο διάστημα $(-10.000, 30.000)$

$L \rightarrow x_{1/4}$ $\quad$ $\frac{1}{2}$: $x_{1/2} = -3400$ $\quad$ $\frac{1}{2}$: -10.000

$u(x_{1/4}) = \frac{1}{4}$ $\quad$ έστω $x_{1/4} = -8000$

$u(X_{3/4}) = \frac{3}{4}$ Έστω $X_{3/4} = 8.000$

$$\begin{pmatrix} -10.000 & 0 \\ -3.400 & 1/2 \\ -8.000 & 1/4 \\ 8.000 & 3/4 \\ 30.000 & 1 \end{pmatrix}$$



Το ισοδύναμο βεβαιότητας (certainty equivalent) μιας λοταρίας (γράφεται $CE(L)$) είναι ο αριθμός $CE(L)$ τέτοιος ώστε ο d.m είναι αδιάφορος μεταξύ της λοταρίας και του να λάβει μια συγκεκριμένη απολαβή $CE(L)$

$\xrightarrow{1} -3400$ $\quad$ $\frac{1}{2}$ 30.000, $\frac{1}{2}$ -10.000 $\quad$ $CE(L) = -3400$

Η προσαύξηση επικινδυνότητας μιας λοταρίας, $RP(L)$, (risk premium) δίνεται ως $EV(L) - CE(L)$ όπου $EV(L)$ είναι η αναμενόμενη τιμή των αποδόσεων της λοταρίας $RP(L) = EV(L) - CE(L)$

$EV(L) = \frac{1}{2} 30000 + \frac{1}{2}(-10000) = 10.000$

$RP(L) = 10.000 - (-3400) = 13400$

Σε σχέση με την στάση που έχει ο d.m. ως προς το ρίσκο
αυτός χαρακτηρίζεται ως

1) επιφυλακτικός ως προς το ρίσκο (risk averse) <u>αν</u> για οποιαδήποτε μη εκφυλισμένη λοταρία L. $RP(L)>0$

2) ουδέτερη ως προς το ρίσκο (risk neutral) -//-
-//- $RP(L)=0$

3) επιδιώκει το ρίσκο (risk seeking) -//-
-//- $RP(L)<0$

Αν έχω $u(x)$ διαφορίσιμη συνάρτηση τότε

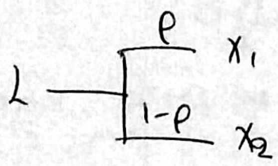
1) Risk averse <u>ανν</u> $u(x)$ είναι αυστηρά κοίλη

2) Risk neutral <u>ανν</u> $u(x)$ είναι γραμμική

3) Risk seeking <u>ανν</u> $u(x)$ είναι αυστηρά κυρτή

$\boxed{\text{Απόδειξη}}$

1) Αν $u(x)$ αυστηρά κοίλη τότε $RP(L)=EV(L)-CE(L)>0$



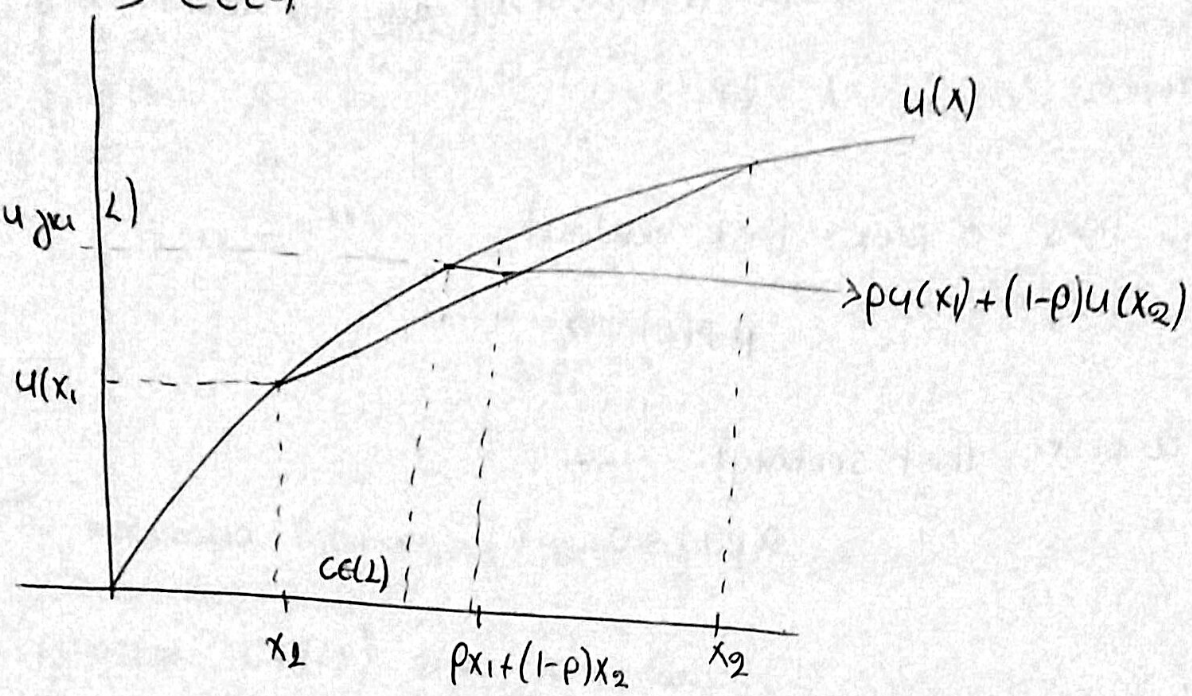
$EV(L)=p x_1+(1-p)x_2$

$u(p x_1+(1-p)x_2) > p u(x_1)+(1-p)u(x_2) = E(u \text{ για } L) = u(CE(L))$

$u(\rho x_1 + (1-\rho)x_2) > u(CE(L))$

$\xrightarrow{L} \rho x_1 + (1-\rho)x_2$

$\xrightarrow{L} CE(L)$



$L_3 \rightarrow \rho x_1 + (1-\rho)x_2 \xrightarrow{\rho} L_2 \rightarrow CE(L) \xrightarrow{i}$ $\begin{cases} \xrightarrow{\rho} x_1 \\ \xrightarrow{1-\rho} x_2 \end{cases}$

$EV(L) > CE(L)$

$\rho x_1 + (1-\rho)x_2 > CE(L)$

$u(\rho x_1 + (1-\rho)x_2) > u(CE(L)) = \rho u(x_1) + (1-\rho)u(x_2)$

Παράδειγμα

2) Η συνάρτηση χρησιμότητας ενός ατόμου δίνεται ως εξής: $u(x) = x^{1/2}$ για $x>0$. Το άτομο έχει 10.000€ μετρητά και ένα σπίτι αξίας 90.000 € . Μια πιθανότητα 0.001 να καταστραφεί το σπίτι του από πυρκαγιά ή άλλη ~~αι~~ αιτία. Πόσα χρήματα είναι διατεθειμένο το άτομο να δώσει για ασφάλεια

σε περίπτωση καταστροφής του.

Λύση

L_1 (αγορά ασφάλειας) $\quad 100.000 - x \quad$ όπου $100.000 = \underset{\text{αυτά που έχει}}{\overset{\text{αξία σπιτιού}}{90.000}} + 10.000$

L_2 (όχι αγορά ασφάλειας) — 0,001 → 10.000 ; 0,999 → 100.000

$L_1 \rho L_2$ ανν $1(100.000-x)^{1/2} \geq 0{,}001 \times 10.000^{1/2} + 0{,}999 \times 100.000^{1/2} = 316{,}01 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < 136{,}71$

$EV(L_3) = 0{,}01 \times 10.000 + 0{,}999 \times 10000 = 99910$

$E(u \text{ για } L) = 316{,}01$

$CE(L_2)$: $\quad u(CE(L_2)) = 316.01$

$(CE(L_2))^{1/2} = 316.01$

$CE(L_2) = 99863{,}24$

$PP(L_2) = EV(L_2) - CE(L_2) = 99910 - 99863{,}24 = 46{,}71$

2) Να κατατάξω τις Λοταρίες

L_1: 1/4 Paris ; 3/4 London.

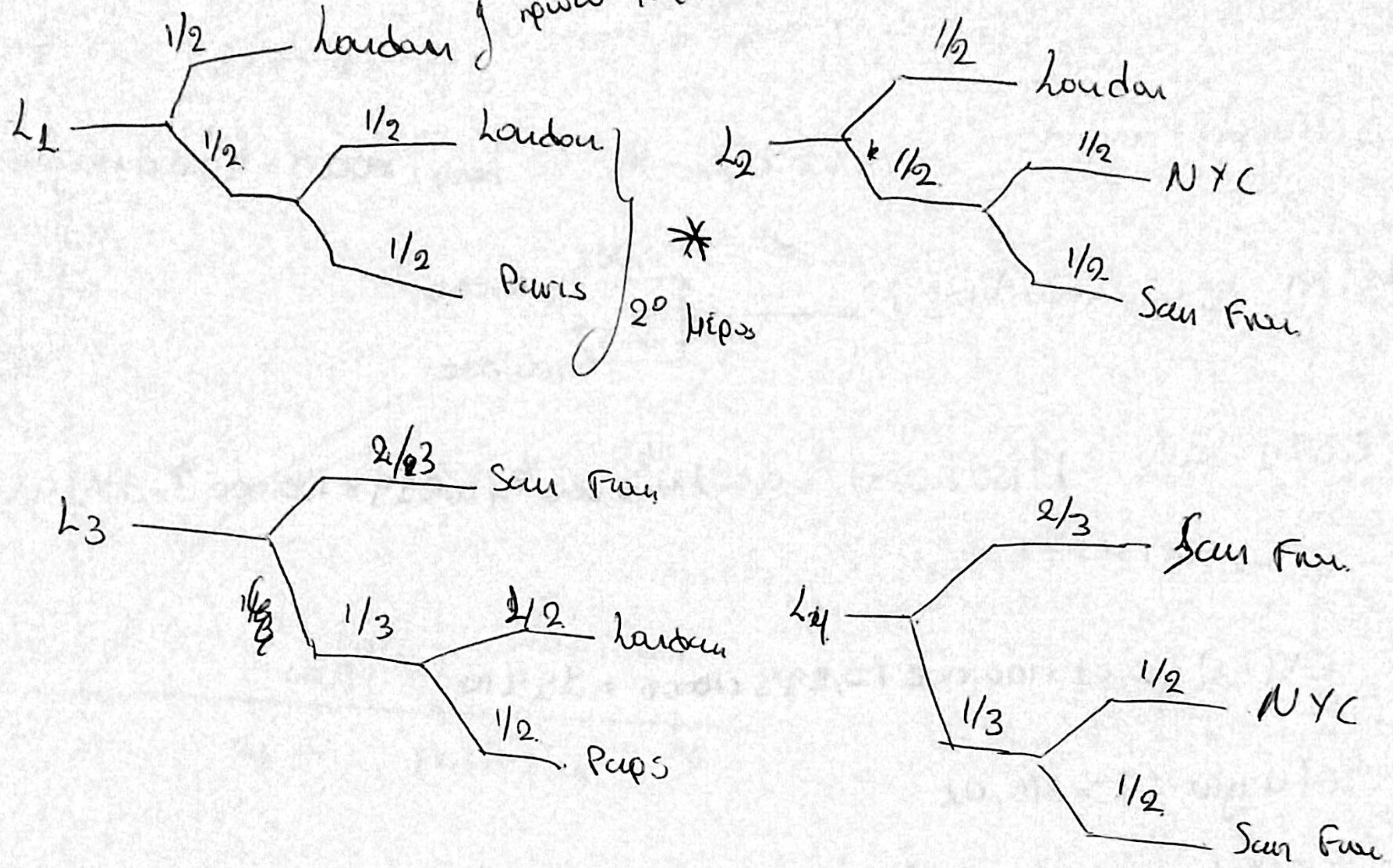
L_2: 1/4 NYC ; 1/4 San Fran ; 1/2 London

L_3: 1/6 Paris ; 2/3 San Fran ; 1/6 London.

L_4: 1/6 NYC ; 5/6 San Fran.

Αν $L_1 \rho L_2$ τότε $L_3 \rho L_4$

Λύση



* Αφού το πάνω μέρος είναι ίδιο στην ουσία προτιμά το L_1 από το L_2 λόγω του δεύτερου μέρους

Οπότε προτιμά το L_3 από το L_4 αφού στο 1ο μέρος είναι ίδιο και οπότε διαλέγει το L_3 όμοιο το L_1 (ως προς το 2ο μέρος)